

STICHTING
MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM

ZW 1962 - 002

Voordracht in de serie "Actualiteiten"

Prof.dr. F. Loonstra

31 maart 1962

Toepassing van subdirecte produkten



ZUIVERE WISKUNDE

Voordracht in de serie "Actualiteiten" door

Prof.dr. F. Loonstra

31 maart 1962

Toepassing van subdirekte produkten

§ 1. Inleiding

Subdirekte produkten van algebra's laten zich (evenals direkte produkten) beschrijven met behulp van congruenties op een algebra A . Elke congruentie θ op A bepaalt een homomorf beeld A_θ van A ; omgekeerd wordt door elke homomorfie van A op B een congruentie op A bepaald.

De congruenties op een algebra A vormen een netwerk $\mathcal{L}(A)$, dat een nulelement 0 en een één-element I heeft. Het produkt van twee congruenties op A wordt bepaald door $a \equiv b(\theta\theta')$, wanneer er een $c \in A$ is, zodat $a \equiv c(\theta)$, $c \equiv b(\theta')$. In een groep zijn congruenties verwisselbaar, d.w.z. $\theta\theta' = \theta'\theta$. De congruentierelaties op A met verwisselbare congruenties vormen een modulair netwerk, terwijl $\theta\theta' = \theta \cup \theta'$.

Veronderstel, dat θ_1, θ_2 twee verwisselbare congruenties op A zijn, terwijl $\theta_1 \cap \theta_2 = 0$, $\theta_1 \cup \theta_2 = I$; dan is A isomorf met het direkte produkt $A_1 \times A_2$, waarin A_i het homomorfe beeld van A modulo θ_i is ($i=1,2$). Algemeen corresponderen de voorstellingen van een algebra A als direkt produkt $A_1 \times \dots \times A_r$ een-eenduidig met de stelsels (verwisselbare) congruenties $\theta_1, \dots, \theta_r$ op A , waarvoor

$$\theta_1 \cap \dots \cap \theta_r = 0, (\theta_1 \cap \dots \cap \theta_{i-1}) \cup \theta_i = I \quad (i=1, \dots, r).$$

§ 2. Is S een subalgebra van het direkte produkt van algebra's A_i ($i=1,2,\dots$), dan is S tevens subalgebra van het direkte produkt van zijn componenten S_i ($i=1,2,\dots$);

men zegt, dat S een subdirekt produkt van de algebra's S_i ($i=1,2,\dots$) is, wanneer de "projecties" van de elementen $s \in S$ op de i -de komponent s_i epimorfismen van S op S_i zijn ($i=1,2,\dots$). Men bewijst nu eenvoudig: De voorstellingen van een algebra A als subdirekt produkt corresponderen een-eenduidig met de stelsels congruenties op A , die voldoen aan $\bigcap \theta_i = 0$. We noemen A subdirekt irreducibel, als voor elke schrijfwijze van A als subdirekt produkt van algebra's A_i tenminste één van de epimorfismen van $a \in A$ op zijn componenten A_i een isomorfie is. Dit is gelijkwaardig met: de doorsnede van alle congruenties $\theta > 0$ (met $\theta \neq 0$) op A is een congruentie $\theta' > 0$ ($\neq 0$). Algemeen geldt: Elke algebra A is voor te stellen als subdirekt produkt van subdirekt irreducibele algebra's. Het tot dusverre behandelde vindt men bij G. Birkhoff, Lattice theory, Ch.VI. Voor ringen vindt men desbetreffende resultaten bij McCoy (zie lit.): Zij (A_i) een stelsel idealen van een ring R met $\bigcap A_i = (0)$, dan is R isomorf met een subdirekte som van de ringen R/A_i . Een ring R is subdirekt irreducibel, dan en slechts dan als de doorsnede van alle idealen $\neq (0)$ uit R een ideaal $\neq (0)$ is. Elke ring is isomorf met een subdirekte som van subdirekt irreducibele ringen. McCoy klassificeerde de subdirekt irreducibele comm. ringen.

§ 3. Subdirekte produkten van groepen

Zij G een subdirekt produkt van de groepen A en B , terwijl $A_0 = G \cap A$, $B_0 = G \cap B$; dan is $A/A_0 \cong B/B_0$. Zij verder F een groep, isomorf met beide factorgroepen; stellen we de nevenklasse aA_0 voor door $\bar{a} \in F$, de nevenklasse bB_0 door $\bar{b} \in F$, dan zal, als

$$\varphi: a \rightarrow \bar{a}, \quad \psi: b \rightarrow \bar{b},$$

de groep G juist bestaan uit die paren $(a,b) \in A \times B$ met $a\varphi = b\psi$ (stelling van Klein-Fricke).

Bezit G normaaldelers D_i ($i \in I$), waarvan de doorsnede (e) is, dan is G subdirekt produkt van de groepen G/D_i ($i \in I$).

Bezit een groep G normaaldelers C_i , waarvan het produkt een direkt produkt is, dan is G een subdirekt produkt met gemeenschappelijke komponentenfaktorgroep.

Zij nu A_i ($i \in I$) een stelsel groepen, α_i een epimorfie van A_i op een vast gekozen groep F ; de elementen g van het (volledige) direkte produkt $\mathcal{G} = \prod_i A_i$, $g = (\dots, a_i, \dots, a_j, \dots)$ waarvoor

$$a_i \alpha_i = a_j \alpha_j \quad (i \neq j)$$

vormen een subdirekt produkt G der A_i met gemeenschappelijke komponentenfaktorgroep F . Als $G \cap A_i = C_i$, dan is $A_i/C_i \cong F$ ($i \in I$).

We bewijzen nu omgekeerd:

Zij $\mathcal{G} = \prod_i A_i$ het volledige direkte produkt van een stelsel groepen A_i ($i \in I$) en G een subdirekt produkt der A_i met de volgende eigenschap: als $G \cap A_i = C_i$, $G \cap (\prod_{j \neq i} A_j) = D_i$, dan is

$$D_i \subseteq \prod_{j \neq i} C_j.$$

In dat geval bestaat een groep F en een stelsel epimorfismen $\alpha_i : A_i \rightarrow F$, zodat G juist de groep van alle $g \in \mathcal{G}$ is, waarvan de komponenten op F hetzelfde beeld hebben.

Als toepassingen bewijzen we de volgende stellingen:

- I. Is G een ondergroep van het direkte produkt $P = A \times B$, zodat $G \cap A$ normaaldeeler van A , $G \cap B$ normaaldeeler van B is, dan bestaat een groep F en twee homomorfismen α, β van A in F , resp. van B in F , zodat G precies de groep van alle elementen (a, b) uit P is met $a\alpha = b\beta$.
- II. Zij G ondergroep van het volledige direkte produkt $P = \prod_i A_i$, zodat
 - 1° $C_i = G \cap A_i$ normaaldeeler is van A_i ($i \in I$);
 - 2° als $G \cap (\prod_{j \neq i} A_j) = D_i$, dan is $D_i \subseteq \prod_{j \neq i} C_j$;

Noemen we de komponent van G in A_1 kortweg B_1 , dan bestaat op grond van 2^0 een groep F en epimorfismen $\alpha_1: B_1 \rightarrow F$, zodat G juist de groep is van alle elementen $g = (\dots, a_1, \dots, a_j, \dots)$ uit $\prod_1 B_1$ waarvoor $a_1 \alpha_1 = a_j \alpha_j$ ($i \neq j$). We breiden nu de epimorfismen α_1 uit tot homomorfe afbeeldingen $\bar{\alpha}_1$ van A_1 op een groep F_1 , waarin F_1 op dezelfde wijze uit F is afgeleid als in (I).

Noemen we nu $\bar{\Phi}$ het vrije produkt van alle F_1 met gemeenschappelijke ondergroep F , dan is G precies de verzameling van alle

$$g = (\dots, a_1, \dots, a_j, \dots) \text{ met } a_1 \bar{\alpha}_1 = \dots = a_j \bar{\alpha}_j = \dots$$
